Bestimmung der Lebensdauer kosmischer Myonen

Thomas Bergauer

15. Juni 2012

1 Grundlagen

Das Standardmodell der Teilchenphysik besagt, dass die Materie aus Quarks und Leptonen aufgebaut ist. Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen wird durch den Austausch von Feldquanten (Bosonen) verursacht.

Das Proton zum Beispiel besteht aus zwei up- und einem down Quark, während das Neutron aus einem up- und zwei down Quarks zusammengesetzt ist. Teilchen aus drei Quarks heißen Baroynen, solche aus einem Quark und einem Anti-Quark nennt man Mesonen.

Pionen und Kaonen gehören zu den Mesonen. Das π^+ ist eine Kombination aus $u\bar{d}$ Quarks, das π^- eine $\bar{u}d$-Kombination (Antiquarks sind überstrichen dargestellt). Kaonen bestehen aus Strange und Up-Quarks: $K^+ = u\bar{s}$, $K^- = \bar{u}s$.

Myonen hingegen gehören, zusammen mit Elektronen und den Neutrinos, zur Familie der Leptonen, die der schwachen Wechselwirkung unterliegen. Myonen sind 206 mal schwerer als Elektronen und gehören zur 2. Generation der Elementarteilchen.

Die kosmische Höhenstrahlung (Primärstrahlung) besteht im wesentlichen (90%) aus energiereichen Protonen (max. beobachtete Energie 10^{11} GeV). Bei Zusammenstößen dieser Protonen mit Sauerstoff- oder Stickstoff-Molekülen der Atmosphäre entstehen unter anderem Pionen, d.h. Pi-Mesonen (π^+ und π^-) und Kaonen:

$$\begin{aligned} p + \mathrm{O}^{16} &\rightarrow n + \pi^+ \\ n + \mathrm{N}^{14} &\rightarrow p + \mathrm{C}^{14} \end{aligned}$$

oder durch pp-Interaktionen:

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow p + n + \pi^+ \\ p + n &\rightarrow p + p + \pi^- \\ p + p &\rightarrow p + n + K^+ \end{aligned}$$

Pionen und Kaonen zerfallen weiter in Myonen plus Myon-Neutrinos:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \end{aligned}$$

Den Ablauf eines kosmischen Schauers in der Atmosphäre zeigt Abbildung 1.

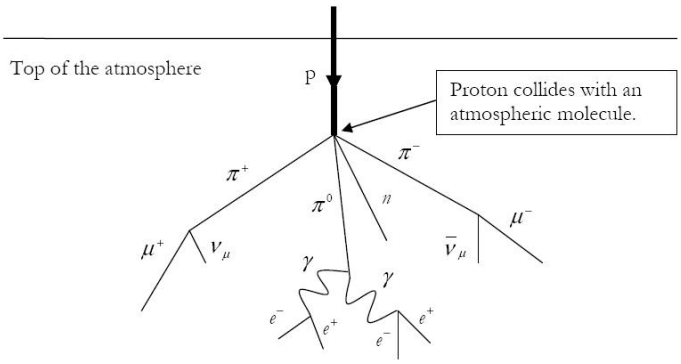


Abbildung 1: Vereinfachtes Bild eines kosmischen Schauers. In Wirklichkeit und abhängig von der Energie des einfallenden Protons werden viel mehr Teilchen erzeugt.

Das Myon erhält den größten Teil der kinetischen Energie des Pions. Abbildung 2 zeigt ein solches Energiespektrum.

Die Myonen verlieren auf ihrem Weg durch die Atmosphäre ca. 1MeV/4m Luft (in der Nähe der Erdoberfläche). Wegen der relativistischen Zeitdilatation können die Teilchen sehr weite Entfernungen zurücklegen. Auf Meereshöhe beträgt die Rate der hochenergetischen kosmischen Myonen etwa $1 \frac{\text{Myon}}{\text{cm}^2\,\text{min}}$

2 Myonenzerfall

Myonen zerfallen unter Austausch eines W-Bosons (schwache Wechselwirkung) mit einer mittleren Lebensdauer von $2,197\,\mu\text{s}$ (vgl. `http://pdg.lbl.gov/2006/tables/lxxx.pdf`) in:

$$\begin{aligned} \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \\ \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \end{aligned}$$

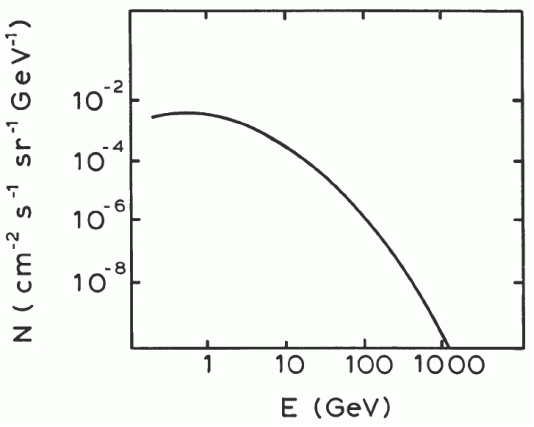


Abbildung 2: Energiespektrum kosmischer Myonen auf Meereshöhe.

Positive Myonen zerfallen ausschließlich nach obigem Schema. Negative Myonen können auch von einem Atom eingefangen werden und auf Bohrschen Bahnen kreisen. Wegen ihrer größeren Masse entsteht eine Kaskade von Elektronenübergänge, bis das Myon auf der innersten Schale ist. Dort kann es vom Kern eingefangen werden:

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu$$

Diese so genannte Einfangreaktion steht mit dem freien Zerfall (siehe oben) in Konkurrenz. Bei diesem Prozess hat das negative Myon eine kürze Lebensdauer. Diese hängt von der Kernmasse des Targetmaterials ab. Dashalb verkürzt sich die Lebensdauer des μ^-. Die Wahrscheinlichkeit fuer den μ^--Einfang is proportional der Wahrscheinlichkeit, dass sich das Myon innerhalb des Kerns aufhält, multipliziert mit der Protonendichte Z/V, wobei V das Volumen des Kernes ist. Für leichte Kerne ist diese Wahrscheinlichkeit proportional Z^4, für schwerere Aufgrund von Korrekturen etwas weniger. Die Lebensdauer der μ^- berechnet sich somit zu:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_c} \tag{1}$$

wobei τ_0 die Lebensdauer bei freiem Zerfall und τ_c die bei Myoneneinfang ist.

3 Messanordnung

Den Aufbau der Messanordnung zeigt Abbildung 3.

Die Myonen werden in einer Anordnung von drei übereinander angeordneten Szintillatoren (A,B und C) mit Sekundärelektronenvervielfachern (Photomultipliern) detektiert. Zwischen den ersten beiden Szintillatoren A und B ist eine Bleischicht angebracht. Der zweite Szintillator ist aus dichterem Material und ist gleichzeitig das Target. Ein Myonzerfall im Target wird registriert, wenn die ersten beiden Szintillatoren ansprechen, der dritte jedoch nicht. Das Zerfallselektron oder -positron wird dann im zweiten oder dritten Detektor gemessen.

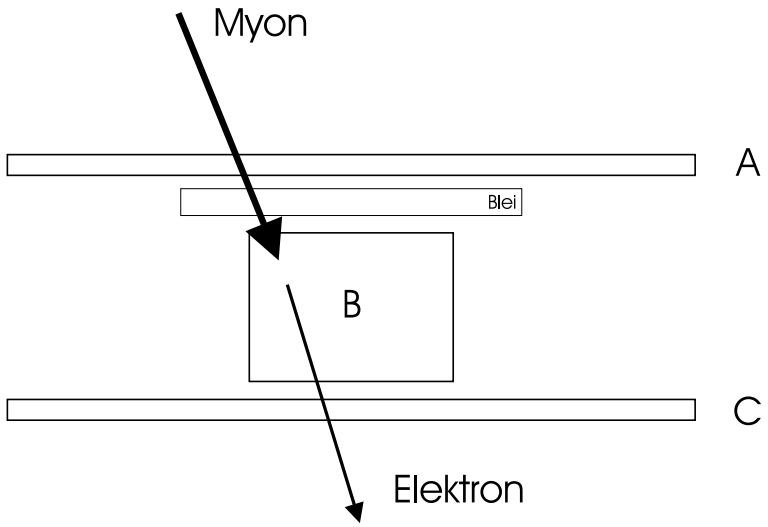


Abbildung 3: Messaufbau des Experiments.

Der erste Detektor darf hier jedoch nicht ansprechen, da das Elektron oder Positron nicht durch das Blei fliegen kann.

Um die Lebensdauer des Myons zu ermitteln müssen wir die Zeit zwischen dem Einfall des Teilchens und des ausfliegenden Elektrons messen. Dazu definieren wir zwei logische Bedingungen: *Start* ist jener Zeitpunkt, an dem ein Myon durch die Szintillatoren A fliegt und im Target B gestoppt wird und ein Signal erzeugt, und C daher nicht anspricht:

$$\text{Start} = A \wedge B \wedge \bar{C} \tag{2}$$

Zu diesem Zeitpunkt öffnen wir das Gate eines Zählers und warten auf ein Stop-Signal. Dieses Stop ist die Signatur eines Elektrons, dass den Messaufbau nach unten verlässt:

$$\text{Stop} = B \wedge C \wedge \bar{A} \tag{3}$$

Da wir allerdings nicht den gesamten Raumwinkel mit diesem Messaufbau abdecken und z.B. das Elektron nach oben wegfliegen könnte, dürfen wir nach einem Start nicht ewig auf ein Stopsignal warten. Daher wird ein sogenannter Timeout implementiert, der den Zähler nach einer gewissen Zeit wieder stoppt und somit der Setup bereit für das nächste Startsignal wird. Die Timeoutzeit soll ca. die 10-fache Myon-Lebensdauer betragen.

Zur Messung der Zerfallszeit wird vom Startsignal ein RS-Flipflop gesetzt. Dieses Flipflop wird entweder vom echten stop-Signal ($B \wedge C \wedge \bar{A}$) oder nach Ablauf des Timeouts zurückgesetzt. Der Ausgang des Flipflops dient als Gate für ein hochfrequentes Rechtecksignal von 10 MHz ($clock$), das zu einem Zähler geführt wird.

Der Zähler ist in einem VME-Modul realisiert, das über den VME-Bus und einem VME-Controller mit einem Computer verbunden ist. Am Computer existieren Labview-Programme, um diesen Zähler zu aktivieren, auszulesen und zu reset-en.

3.1 Elektronik nach dem NIM Standard

NIM steht für Nuclear Instrument Module. Damit meint man Einschübe in ein so genanntes NIM crate, dass die Stromversorgung auf verschiedenen Spannungslevels über eine gemeinsame Backplane zur Verfügung stellt. Diese Backplane sind Stromschienen mit ±12 und ±24 Volt Gleichspannung. Der Standard sieht ausserdem ±6V DC und 220V oder 110V AC vor, aber nicht alle NIM crates beinhalten diese Pegel. Mechanisch hat ein NIM-Modul eine Standardbreite von 1.35 Zoll (3.43 cm) und eine Höhe von 8.75 Zoll (22.225 cm). Module können aber auch doppelt, dreifach,... so breit sein.

Die Signalpegel der NIM Logik arbeiten mit Konstantstrom statt mit Konstantspannung wie z.B. CMOS/TLL-Logik. Logisch 0 (LO) entspricht 0 mA. Logisch 1 (HI) entspricht -16 mA, das ergibt -0.8 V an 50 Ω. Offene Anschlüssen an Mehrfachausgängen müssen mit sogenannten Terminatoren abgeschlossen sein, um Reflexionen zu vermeiden. Tabelle 1 gibt eine Übersicht über die Strompegel von logischen NIM-Signale.

	Output (must deliver)	Input (must respond to)
Logic 1	-14 to -18 mA	-12 to -36 mA
Logic 0	-1 to +1 mA	-4 to +20 mA

Tabelle 1: Tabelle der Stromlevel der NIM Logik.

3.2 Gebräuchliche NIM Module

3.2.1 Diskriminator

Der Diskriminator erzeugt ein logisches Signal (nach NIM Standard), sobald das Eingangssignal eine gewisse Grösse überschreitet. Diesen Schwellenwert kann man mit dem Regler *threshold* einstellen. Am Monitor-Pin liegt die **10-fache** Schwellenwert-Spannung an. Vernünftige Schwellwerte sind 30-50 mV (300-500 mV am Monitor-Pin). Die Länge des Ausgangssignals definiert man über den Regler *width* auf Werte zwischen 10 und 60 ns.

3.2.2 Koinzidenzen

Unter Koinzidenz versteht man das Zusammentreffen verschiedener Signale in einem einzigen Messereignis bzw. die zusammenfallende Wahrnehmung dieser Signale durch einen Beobachter. Es entspricht einem logischen *UND*. Ein Koinzidenzmodul kann daher aus den Signalen von mehreren zuschaltbaren Eingängen ein Ausgangssignal bilden, dass eine logische Kombination der Eingangssignale ist. Das Ausgangsignal liegt nur solange an, wie das kürzeste Einzelsignal dauert (*linear out*). Im Gegensatz dazu ist der Ausgang des *logical out* solange HI wie mit dem Regler *width* definiert.

3.2.3 Delay

Wie oben erwähnt muss man aufgrund der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit die Signallaufzeiten in den Kabeln berücksichtigen. Damit man z.B. Koinzidenzen bei unterschiedlichen Kabellängen ermitteln kann, kann man das Signal zusätzlich über Kabel mit definierter Länge schicken, um eine zusätzliche Verzögerung zu erhalten. Genau das ist in einem Delaymodul implementiert.

3.2.4 Fan-In/Fan-Out

Als Fan-Out bezeichnet man in der NIM-Logik das Aufteilen eines Signals in mehrere Einzelsignale. Da die NIM-Logik mit Konstantstrom arbeitet, darf man einen Ausgang nicht mit mehreren Eingängen verbinden, ohne einen entsprechenden Verstärker dazwischen geschaltet zu haben. Dieser Verstärker entspricht dem Fan-Out.

Ein Fan-In hingegen ist eine logische *ODER* Verknüpfung der Eingangssignale.

3.2.5 Timing Unit

Eine *Timing Unit* erzeugt nach einem Startpuls einen Ausgangsimpuls einstellbarer Länge. Wenn dieser Impuls zu Ende ist, wird am Ausgang namens *end marker* ein kurzer Impuls ausgegeben. Mit zwei Timing-units lässt sich ein Frequenzgenerator bauen. Ein Timer auf Unendlich entspricht einem Flipflop.

3.2.6 Counter

Ein Modul, dass die Anzahl der Impulse an einem Eingang zählt und auf einer Anzeige darstellt wird Counter genannt. Jeder Counter hat eine *Reset* Leitung um den Zählwert wieder auf null zurückzustellen und einen Gate-Eingang, der mit dem Zähleingang als logisches *UND* verknüpft ist. Damit kann man den Zähleingang aktiv oder inaktiv schalten.

4 Untergrund

Die gemessenen Teilchenzerfälle sind durch unphysikalische Untergrundereignisse verfälscht. Dadurch ist die Verteilung der gemessenen Zerfallszeiten keine reine Wartezeitverteilung mehr, die man mit einer einzelnen Zeitkonstanten beschreiben könnte, sondern vielmehr eine Mischung aus mehreren Wartezeitverteilungen mit unterschiedlichen Zeitkonstanten. Ein Fit an

diese Rohdaten kann deshalb zu keinem sinnvollen Ergebnis führen. Die Aufgabe der Untergrundmessung ist es nun, die Verfälschung zu quantifizieren und daraus cuts abzuleiten, mit denen der Untergrund aus den Rohdaten abgetrennt werden kann.

Wir unterscheiden wir zwei Arten von Untergrund (siehe Abbildung 5):

- Kurzzeituntergrund (blau): unphysikalische Anhäufung von sehr kurzen Zerfallszeiten
- Langzeituntergrund (rot): Überproportional oft auftretende lange Zerfallszeiten

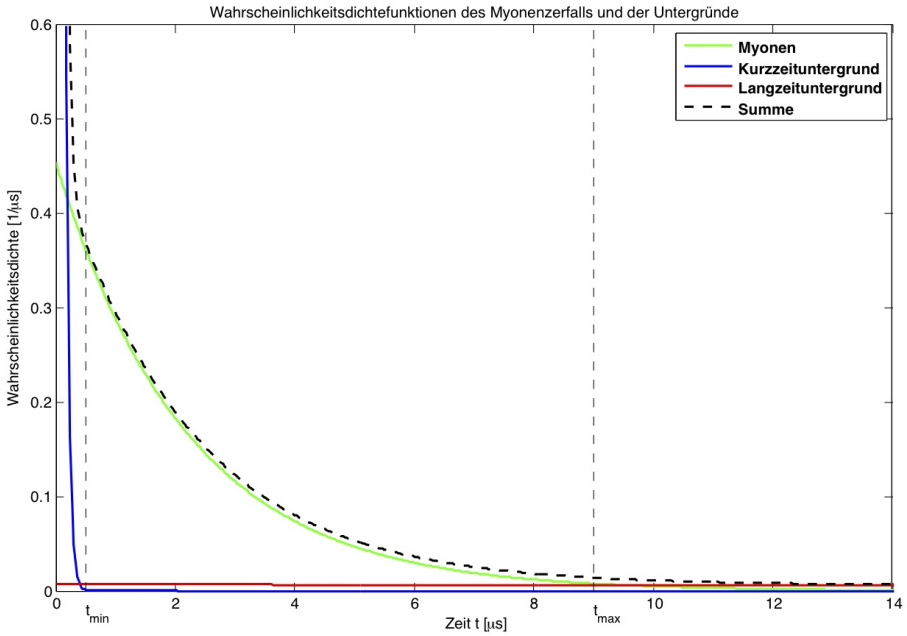


Abbildung 4: Untergrund-Beträge zur Messung.

Dabei sind beide Untergrundarten ihrerseits genauso wie die zu messenden Zerfallszeiten (grün) wartezeitverteilt, nur mit stark unterschiedlichen Zeitkonstanten. Die im Experiment gemessene Wartezeitverteilung ist die Summe aus echten Myonenzerfällen und Untergrundereignissen (schwarz).

4.1 Kurzzeit-Untergrund

Bei sehr kurzen Zerfallszeiten wird eine überproportionale Anhäufung von Ereignissen beobachtet, die nicht von tatsächlichen Myonenzerfällen stammt. Diese Ereignisse haben ihren Ursprung in Myonenschauern, die aus dem Zerfall eines einzigen Mutterteilchens hervorgehen und sich in mehreren, in die selbe Richtung gerichteten Myonen ausdrücken. Man nennt solche Myonen auch *k*orreliert. Fällt so ein Schauer schräg auf die Messapparatur, kann ein Teilchen ein Startsignal geben (Myon M1 im Bild unten), während ein benachbartes aus dem selben Schauer das Stoppsignal auslöset (M3). Da diese Myonen in sehr kurzem

zeitlichen Abstand zueinander auftreten, kann man dieser Art von Untergrund beikommen, indem man kurze Zerfallszeiten unterhalb einer gewissen Mindestzerfallszeit $t_{\min}$ignoriert.

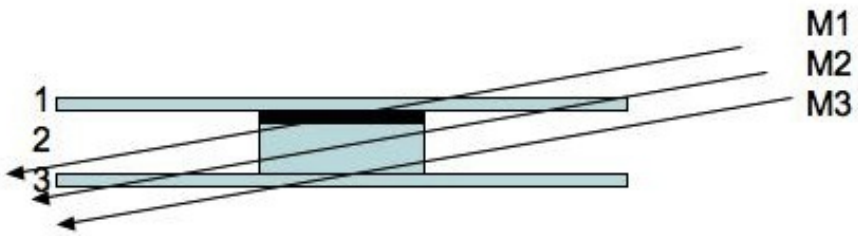


Abbildung 5: Myon-Schauer als Quelle für Kurzzeit-Untergrund.

4.1.1 Bestimmung der Mindestzerfallszeit $t_{\min}$

Es soll die maximale Zeit gemessen werden, die zwischen dem Auslösen des Timers und dem Stoppen des Timers durch ein benachbartes Myon aus dem selben Schauer vergeht. Zu diesem Zwecke lässt man den Timer mit der Koinzidenz $A \wedge B \wedge C$ starten (ein komplett durchgehendes Myon, M2), und stoppt ihn mit der üblichen Stoppkoinzidenz $\bar{A} \wedge B \wedge C$. Man beobachtet eine Anhäufung von Ereignisse bei sehr kurzen Zeiten, aus deren rechtem Rand man eine Schätzung für den unteren cut $t_{\min}$ ablesen kann. Es ist zu beachten, dass diese Messung nur eine Schätzung des Kurzzeituntergrundes darstellt, da nicht mit der Startkoinzidenz gestartet wird, die in der echten Lebensdauermessung verwendet wird.

4.2 Langzeit-Untergrund

Der Langzeituntergrund entsteht durch zufälliges Auslösen eines Stopp-Signals, das nichts mit dem den Start auslösenden Myon zu tun hat. Das kann durch ein Querschläger-Myon passieren, oder durch einen ineffizienten Anticounter 1 in der Stopp-Koinzidenz $\bar{A} \wedge B \wedge C$. Dieser Untergrund zeichnet sich durch eine sehr grosse Zeitkonstante aus und ist dadurch im Gegensatz zu den echten Zerfällen im interessanten Bereich stark unterdrückt. Es kann allerdings vorkommen, dass der Timer durch ein falsches Startsignal angeworfen wird, und durch so ein Untergrundereignis gestoppt wird, bevor er ins timeout läuft. Somit ist der Langzeituntergrund durch das Verhältnis (# falsche Starts / # richtige Starts) überhöht und wird für hohe Zerfallszeiten signifikant. Man kann dieser Art von Untergrund beikommen, indem man lange Zerfallszeiten oberhalb einer gewissen maximalen Zerfallszeit $t_{\max}$ ignoriert.

4.3 Datenanalyse

4.3.1 Die Exponentialverteilung

Die beobachteten Zerfallszeiten sind wartezeitverteilt, d.h. sie folgen einer Exponentialverteilung (oder Wartezeitverteilung) mit folgenden Eigenschaften:

- Stetigkeit: Eine exponentialverteilte Zufallszahl kann jeden beliebigen Wert im Definitionsbereich $\mathbb{D}$ annehmen.

- Dichtefunktion:
$$f(t;\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad t \in \mathbb{D} = [0, \infty), \tag{4}$$
wobei τ die mittlere Lebensdauer ist, die wir aus den Daten schätzen wollen. Abbildung 6 zeigt einen Plot dieser Dichtefunktion.

- Verteilungsfunktion:
$$F(t;\tau) := \int_0^t f(t;\tau)\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5}$$

- Erwartungswert:
$$E(t) := \int_{\mathbb{D}} t \cdot f(t;\tau)\,\mathrm{d}t = \tau \tag{6}$$

- Varianz:
$$\mathrm{var}(t) := \int_{\mathbb{D}} (t - E(t))^2 \cdot f(t;\tau)\,\mathrm{d}t = \tau^2 \tag{7}$$
$$\text{Verschiebungssatz}: \quad \mathrm{var}(t) := E\left((t - E(t))^2\right) = E\left(t^2\right) - E(t)^2 \tag{8}$$

- Normierung:
$$\int_0^\infty f(t;\tau)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{9}$$
Die Normierung beschreibt, dass ein gemessenes Ereignis mit Sicherheit (d.h. Wahrscheinlichkeit 1) eine Zerfallszeit zwischen 0 und ∞ hat. Das Integral einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion üeber ihren gesamten Definitionsbereich (d.h. ihre Gesamtfläche) muss immer 1 sein!

- "Gedächtnislosigkeit": Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Müon nach einer Zeit Δt nach Auslösen des Timers zerfällt, ist unabhängig davon, wie lange es davor schon auf dem Weg zur Erdoberfläche unterwegs war. Es ist also genauso wahrscheinlich, dass ein Teilchen nach Δt nach seinem Entstehen zerfällt, wie dass es nach $t_0 + \Delta t$ zerfällt, wenn wir es zum Zeitpunkt t_0 als noch nicht zerfallen detektiert haben. Oder anders gesagt, auf der Erdoberfläche sehen wir nur den äußerst rechten Schwanz der Wartezeitverteilung, der aber nichtsdestotrotz durch den gleichen globalen Parameter τ beschrieben wird, und den wir messen können.

Die Berechnungsvorschriften für die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz gelten im Allgemeinen für jede beliebige stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

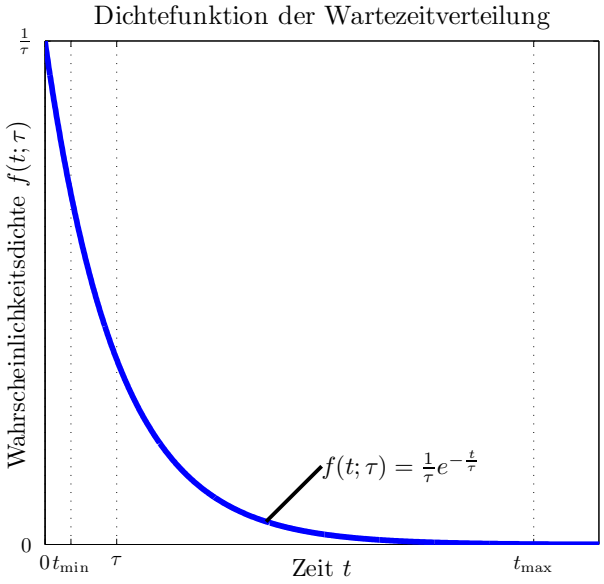


Abbildung 6: Die Dichtefunktion der Exponentialverteilung (Wartezeitverteilung)

Zur Untergrundunterdrückung werden nur Zerfallszeiten für die Analyse akzeptiert, die größer als $t_{\min}$ und kleiner als $t_{\max}$sind (siehe Kapitel 4). Dadurch schränken wir den Definitionsbereich der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ein. Infolgedessen müssen wir auch die Normierung der Wartezeitverteilung anpassen. Es gilt nach wie vor, dass das Integral der Dichtefunktion über den gesamten Definitionsbereich (jetzt $t \in \mathbb{D} = [t_{\min}, t_{\max}]$) gleich 1 sein muss. Um das zu gewährleisten, führen wir eine Normierungskonstante A ein, die wie folgt berechnet wird:

$$\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} A \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \, \mathrm{d}t \stackrel{!}{=} 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{e^{-\frac{t_{\min}}{\tau}} - e^{-\frac{t_{\max}}{\tau}}} \tag{10}$$

Von nun an betrachten wir nur mehr die normierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit dem eingeschränkten Definitionsbereich:

$$f(t;\tau) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{e^{-\frac{t_{\min}}{\tau}} - e^{-\frac{t_{\max}}{\tau}}}, \qquad t \in [t_{\min}, t_{\max}], \tag{11}$$

deren Parameter τ aus den Daten geschätzt werden soll.

4.3.2 Die gebinnte Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Um die gemessenen Daten auszuwerten verwenden wir die "gruppierte (oder gebinnte) Methode der kleinsten Fehlerquadrate". Sie besteht aus folgenden Schritten:

- Schritt 1: Wir histogrammieren die gemessenen Zerfallszeiten. In weiterer Folge werden nur mehr die Bininhalte als die eigentlichen Messwerte angesehen.

- Schritt 2: Wir berechnen die zu erwartenden Bininhalte, unter Annahme verschiedener mittler Zerfallszeiten τ_k. Diese angenommenen mittleren Zerfallszeiten sollen in der Umgebung der wahren mittleren Zerfallszeit liegen.

- Schritt 3: Wir vergleichen die gemessenen Bininhalte mit allen Bininhalten, die wir in Schritt 2 berechnet haben. Hier formulieren wir den Ansatz der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Jene drei angenommenen mittleren Zerfallszeiten τ_k, die am besten zu den gemessenen Daten passen, kommen in die nächste Runde.

- Schritt 4: Wir interpolieren quadratisch zwischen den drei besten angenommen mittleren Zerfallszeiten, um die beste Schätzung für τ zu erhalten.

- Schritt 5: Wir bewerten die Qualität unserer Schätzung anhand statistischer Testgrößen.

Schritt 1: Histogramm der gemessenen Zerfallszeiten: In einem Histogramm mit einer bestimmten Anzahl äquidistanter Bins B (10 bis 15) lässt sich die Form der Exponentialverteilung schon gut erkennen (siehe Abbildung 7). Abhängig vom gesamten Datenumfang kann man auch mehr Bins verwenden.

Es fällt auf, dass die Bins zu langen Zerfallszeiten hin zusehens weniger Einträge haben, und somit immer weniger statistische Information tragen. Um dem entgegenzuwirken verwendet man nicht-äquidistante Bingrenzen, die so gewählt werden, dass in allen Bins in etwa gleich viele Ereignisse zu finden sind. Die Binbreiten müssen also mit steigender Zerfallszeit exponentiell wachsen.

Die exponentiell verteilten Bingrenzen b_i erhält man, indem man eine fundamentale Eigenschaft aller Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktionen verwendet. Wenn man die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion (nicht der Dichtefunktion!) mit gleichverteilten Zahlen füttert, bekommt man als Ergebnis Zahlen, die gemäß der zugehörigen Dichtefunktion verteilt sind[1]. Das ist in Abbildung 8(a) dargestellt, hier für die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung.
Die Berechnung der exponentiell verteilten Bingrenzen über die inverse Verteilungsfunktion setzt die Kenntnis des Parameters τ voraus, der ja erst geschätzt werden soll. Abhilfe schafft die Beobachtung, dass der Erwartungswert der Exponentialverteilung gleich der mittleren

[1] Das gilt für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen, natürlich solange die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion berechnet werden kann.

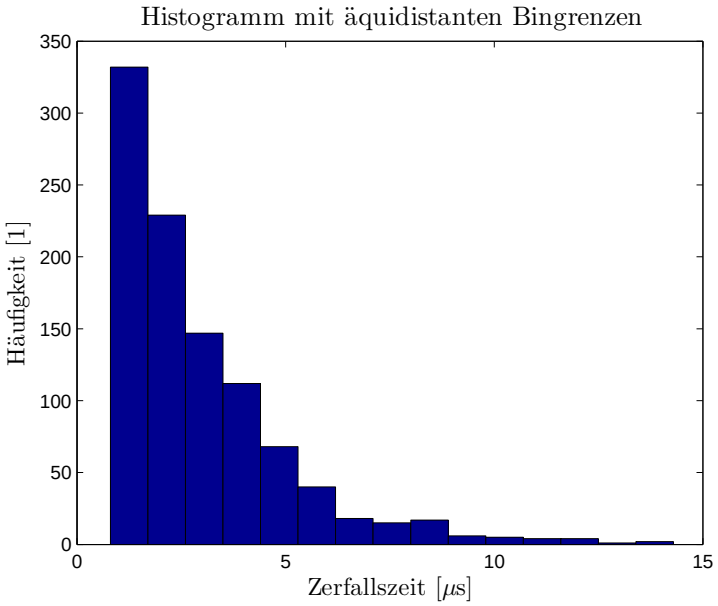


Abbildung 7: Äquidistantes Histogramm wartezeitverteilter Ereignisse.

Lebensdauer τ ist. Dieser Erwartungswert berechnet sich als Mittelwert der gemessenen Zerfallszeiten. Abbildung 8(b) zeigt das Histogramm mit den exponentiell verteilten Bingrenzen, in dem alle Bins in etwa gleichmäßig gefüllt sind.

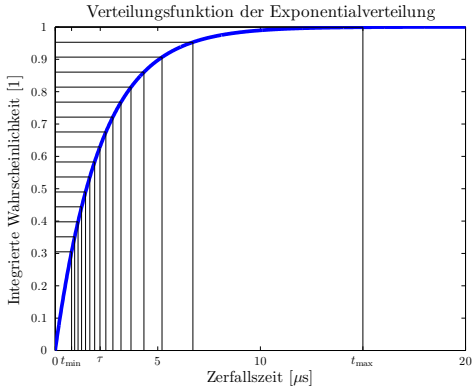
Schritt 2: Berechnung der zu erwartenden Bininhalte, unter Annahme verschiedener mittler Zerfallszeiten: Wir suchen jene mittlere Zerfallszeit $\tilde{\tau}$, die die gemessenen Zerfallszeiten am besten beschreibt[2]. Um dieses $\tilde{\tau}$ zu finden wählen wir zunächst beispielsweise zehn verschiedene τ_k in einer vernünftigen Umgebung um das wahre τ. Wie in Schritt 2 behelfen wir uns wieder mit dem Mittelwert der gemessenen Zerfallszeiten, um eine grobe Schätzung von τ zu erhalten.

$$\tau_k \in [1.5\,\mu\text{s}, \cdots, 3.0\,\mu\text{s}] \tag{12}$$

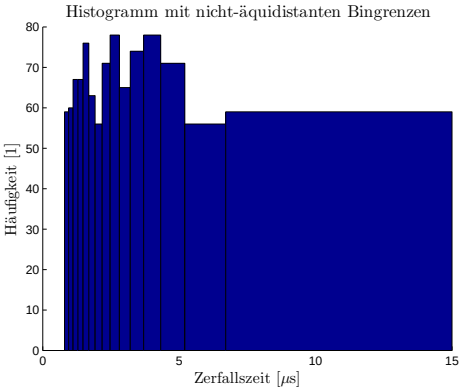
Für jedes dieser willkürlich gewählten τ_k berechnen wir nun Bininhalte, die bei einer Exponentialverteilung mit dem Parameter τ_k zu erwarten sind. Die Wahrscheinlichkeit, n_i Zerfallszeiten im i-ten Bin zu finden ist multinomial verteilt. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die "Multinomialverteilung", hat folgende Eigenschaften:

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung: Die Zufallszahlen können nur bestimmte, diskrete Werte annehmen.

[2]Zur Nomenklatur: τ ist die wahre mittlere Zerfallszeit, die uns unbekannt ist, wohingegen $\tilde{\tau}$ die beste Schätzung von τ im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist. $\tilde{\tau}$ ist das Ergebnis unserer Analyse.



(a) Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung. Gleichverteilte Zahlen auf der y-Achse ergeben exponentialverteilte Zahlen auf der x-Achse.



(b) Nicht-äquidistantes Histogramm wartezeitverteilter Ereignisse. Die Bingrenzen werden aus der inversen Verteilungsfunktion berechnet.

Abbildung 8: Die nicht-äquidistanten Bingrenzen werden mit der Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion berechnet.

- Dichtefunktion:

$$f(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_d) = \frac{N!}{n_1! \ldots n_B!} \prod_{i=1}^{B} p_i^{n_i}, \tag{13}$$

mit

$$N = \sum_{i=1}^{B} n_i, \qquad \sum_{i=1}^{B} p_i = 1. \tag{14}$$

n_i ist der Inhalt des i-ten Bins, B ist die Anzahl der Bins, N ist die Gesamtanzahl der Datenpunkte im Histogramm, und p_i ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Datenpunkt in den Bin i fällt.

- Erwartungswert:

$$E(n_i) := \sum_{i=1}^{B} n_i \cdot p_i = N \cdot p_i \tag{15}$$

- Varianz:

$$\mathrm{var}(n_i) := \sum_{i=1}^{d} (n_i - E(n_i))^2 \cdot p_i = N \cdot p_i \cdot (1 - p_i) \tag{16}$$

Der Verschiebungssatz (Gleichung 8) gilt auch hier.

- Kovarianz:

$$\mathrm{cov}(n_i, n_j) := E\left((n_i - E(n_i)) \cdot (n_j - E(n_j))\right) = -N \cdot p_i \cdot p_j \tag{17}$$

Wieder gelten die Berechnungsvorschriften für den Erwartungswert und die Varianz im Allgemeinen für jede beliebige diskrete Verteilung. Die Definition der Kovarianz gilt allgemein

für Paare von Zufallszahlen, egal aus welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung sie stammen. Die Wahrscheinlichkeit p_i dass ein Ereignis in den Bin i fällt wird aus der dem Histogramm zu Grunde liegenden theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet. Folgendes gilt für jede stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis zwischen t_i und t_{i+1} auftritt, ist $p_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$, wobei $f(t)$ die normierte Dichtefunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Für unseren Fall findet sich die normierte Dichtefunktion in Gleichung 11, und t_i und t_{i+1} sind die unteren und oberen Bingrenzen des aktuell betrachteten Bins i, also b_i und b_{i+1} aus Schritt 2:

$$p_{i,k} = \int_{b_i}^{b_{i+1}} \frac{1}{\tau_k} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{\tau_k}}}{e^{-\frac{t_{\min}}{\tau_k}} - e^{-\frac{t_{\max}}{\tau_k}}}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-\frac{b_i}{\tau_k}} - e^{-\frac{b_{i+1}}{\tau_k}}}{e^{-\frac{t_{\min}}{\tau_k}} - e^{-\frac{t_{\max}}{\tau_k}}}. \tag{18}$$

Einsetzen in die Bestimmungsgleichung 15 ergibt den Erwartungswert des Inhalts von Bin i für ein gegebenes τ_k.

Schritt 3: Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate: Wir vergleichen nun die gemessenen Bininhalte n_i mit den hypothetischen, berechneten Bininhalten $n_{i,k}$ für alle τ_k, um jene drei τ_k zu finden, die dem wahren τ am nächsten kommen. Wir brauchen also eine Methode, um die Güte unserer Hypothesen τ_k zu bewerten. Das gängigste Mittel ist hierbei die Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Man berechnet die Abweichung der hypothetischen Bininhalte $n_{i,k}$ von den gemessenen n_i, quadriert sie, und summiert diese "Fehlerquadrate" auf. Man erhält die sogenannte "Zielfunktion" M als Funktion der hypothetischen τ_k:

$$M(\tau_k) = \sum_{i=1}^{B} (n_i - n_{i,k})^2 = \begin{pmatrix} n_1 - n_{1,k} & ,\cdots, & n_i - n_{i,k} & ,\cdots, & n_B - n_{B,k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 - n_{1,k} \\ \vdots \\ n_i - n_{i,k} \\ \vdots \\ n_B - n_{B,k} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

wobei B die Anzahl der Bins ist. Je kleiner diese Summe ist, desto besser passt die Hypothese zu den gemessenen Daten. Wir haben also eine Optimierungsaufgabe vorliegen, deren Lösung die beste Schätzung $\tilde{\tau}$ fuer das wahre τ darstellt:

$$\tilde{\tau} = \arg\min M(\tau_k). \tag{20}$$

Der Ansatz 19 kann noch verbessert werden: Jede unserer Messungen n_i hat eine gewisse statistische Unsicherheit, weiters bestehen zwischen den Messungen Korrelationen, die wir berücksichtigen müssen. Wir gewichten also die einzelnen Fehlerquadrate mit ihrer statistischen

Unsicherheit, und integrieren die Korrelationen. Dementsprechend erweitern wir die Zielfunktion um eine Gewichtsmatrix, sodass M folgende Form annimmt:

$$M(\tau_k) = \Big(n_1 - n_{1,k} \quad ,\cdots, \quad n_i - n_{i,k} \quad ,\cdots, \quad n_B - n_{B,k}\Big) \cdot \mathbf{G} \cdot \begin{pmatrix} n_1 - n_{1,k} \\ \vdots \\ n_i - n_{i,k} \\ \vdots \\ n_B - n_{B,k} \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{G} = \mathbf{V}^{-1} \tag{21}$$

Die Gewichtsmatrix ist die inverse Kovarianzmatrix[3], welche die Varianzen und Kovarianzen der Bininhalte gemäß den Gleichungen 16 und 17 enthält:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} var(n_1) & cov(n_1, n_2) & \cdots & cov(n_1, n_B) \\ cov(n_2, n_1) & var(n_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ cov(n_B, n_1) & \cdots & \cdots & var(n_B) \end{pmatrix} \tag{22}$$

Wir müssen Näherungen anbringen, um diese Matrix einfach invertierbar zu machen. Dazu nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis in einen Bin fällt klein gegen 1 ist: $p_i \ll 1$. Damit können wir die Varianzen und Kovarianzen folgendermaßen annähern:

$$\mathrm{var}(n_i) \approx N \cdot p_i = E(n_i) \approx n_i \tag{23}$$

$$\mathrm{cov}(n_i, n_j) \approx 0 \tag{24}$$

Zur Berechnung der Varianzen 23 wäre wieder die Kenntnis des wahren τ vonnöten. Die Beobachtung, dass die genäherte Varianz genau dem Erwartungswert entspricht, erlaubt uns aber einen Trick. Wir haben durch unser Experiment ja eine Messung des Erwartungswerts jener Bininhalte erhalten, die auf dem wahren τ basieren. Also setzen wir für den Erwartungwert (und damit auch für die Varianz) unsere gemessenen Bininhalte n_i ein[4]. Insgesamt nimmt die Zielfunktion M damit folgende Form an:

[3] Durch diesen Ansatz wird unsere Schätzung optimal gemacht, d.h. das resultierende $\tilde{\tau}$ wird die geringste Standardabweichung σ haben.

[4] Von dieser Vorgehensweise kommt die allgemeine Faustregel, für die Unsicherheit eines Bininhaltes immer $\sigma(n_i) = \sqrt{\mathrm{var}(n_i)} = \sqrt{n_i}$ anzunehmen.

$$
\begin{aligned}
M(\tau_k) &= \begin{pmatrix} n_1 - n_{1,k} & , \cdots , & n_i - n_{i,k} & , \cdots , & n_B - n_{B,k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 - n_{1,k} \\ \vdots \\ n_i - n_{i,k} \\ \vdots \\ n_B - n_{B,k} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{B} \frac{(n_i - n_{i,k})^2}{n_i} \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Jener Parameter $\tilde{\tau}$, der diese finale Zielfunktion minimiert, ist die optimale Schätzung der wahren mittleren Zerfallszeit τ. Die Minimierung erfolgt in diesem Fall nicht analytisch, sondern numerisch durch unsere verschiedenen, hypothetischen mittleren Zerfallszeiten τ_k (Gleichung 12). Wir suchen nun jenes τ_m, das den kleinsten Wert der Zielfunktion 25 ergibt. Dieses τ_m und die zwei benachbarten Werte τ_{m-1} und τ_{m+1} verwenden wir für die weitere Analyse. Abbildung 9 zeigt die numerisch ausgewertete Zielfunktion sowie die gewählten drei kleinsten Werte.

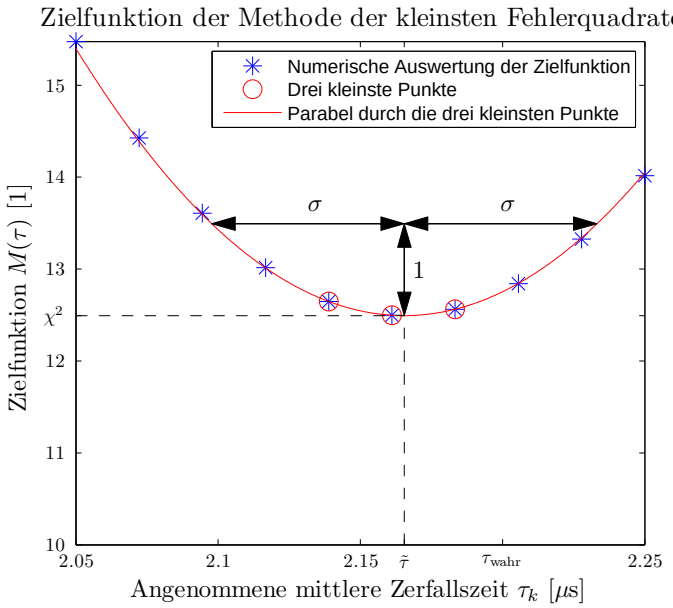


Abbildung 9: Das Minimum der Zielfunktion ergibt die beste Schätzung $\tilde{\tau}$ der wahren mittleren Zerfallszeit τ. Durch die drei kleinsten Punkte wird eine Parabel gelegt, deren Scheitelpunkt $\tilde{\tau}$ definiert.

Schritt 4: Finden der besten Schätzung $\tilde{\tau}$ der wahren mittleren Zerfallszeit τ: In der Nähe des Minimums kann die Zielfunktion $M(\tau_k)$ durch eine Parabel $M(\tau_k) \approx a \cdot \tau^2 + b \cdot \tau + c$ angenähert werden. Wir legen also eine Parabel durch die im vorhergegangenen Schritt ermittelten kleinsten Punkte der Zielfunktion, indem wir folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\vec{y} \quad = \quad \mathbf{X} \quad \cdot \quad \vec{p}$$

$$\begin{pmatrix} M(\tau_{m-1}) \\ M(\tau_m) \\ M(\tau_{m+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{m-1}^2 & \tau_{m-1} & 1 \\ \tau_m^2 & \tau_m & 1 \\ \tau_{m+1}^2 & \tau_{m+1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{26}$$

Man erhält die Parameter a, b und c indem man das Gleichungssystem von links mit der inversen Matrix $\mathbf{X}^{-1}$ multipliziert.
Die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist unsere gesuchte beste Schätzung $\tilde{\tau}$, während die y-Koordinate eine wichtige Testgröße namens χ^2 darstellt. Diese Koordinaten des Scheitelpunkts ermittelt man mit einer Extremwertaufgabe, die folgende Berechnungsvorschriften ergibt:

$$\tilde{\tau} = \frac{b}{2a} \tag{27}$$

$$\chi^2 = c - \frac{b^2}{4a} \tag{28}$$

Die Öffnung der Parabel ist ein Maß für die statistische Unsicherheit unserer Schätzung. Eine weit geöffnete, flache Parabel legt die Lage des Scheitelpunkts statistisch nicht so gut fest wie eine enge, steile Parabel. Die Standardabweichung σ von $\tilde{\tau}$ erhält man aus der Beziehung $M(\tilde{\tau}\pm\sigma) = M(\tilde{\tau})+1$ durch Schneiden der Parabel mit der Horizontalen $M(\tilde{\tau}) + 1$:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{29}$$

Die Größen $\tilde{\tau}$, χ^2 und σ sind in Abbildung 9 eingezeichnet.

Schritt 5: Bewertung der Güte unserer Schätzung: Die wichtigste Testgröße für Schätzungen mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist das χ^2. Diese Größe ist die verbleibende quadratische Abweichung unserer besten Schätzung $\tilde{\tau}$ von den Daten: $\chi^2 = M(\tilde{\tau})$. Diese verbleibende Abweichung ist ihrerseits eine Zufallsgröße und ist gemäß einer χ^2-Verteilung verteilt. Diese Verteilung hat einen einzigen Parameter, die Anzahl der Freiheitsgrade D. Der Erwartungswert der χ^2-Verteilung entspricht eben dieser Anzahl der Freiheitsgrade: $E\left(\chi^2\right) = D$. Wenn unsere Schätzung von τ statistisch in Ordnung ist, so wird unser berechnetes χ^2 in der Umgebung dieses Erwartungswertes liegen. Gibt es eine signifikante Abweichung, dann ist das ein Zeichen dafür, dass etwas mit unserer Auswertung nicht stimmt.

Der Begriff "Anzahl der Freiheitsgrade" lässt sich am besten mit einem Beispiel erklären: Wenn man eine Gerade durch zwei Punkte legt ("fittet"), ist die Gerade eindeutig bestimmt,

der “Fit” hat keine Freiheitsgrade. Man hat zwei Punkte zur Verfügung, berechnet damit die zwei Parameter einer Geraden, und hat damit ein eindeutig bestimmtes Gleichungssystem. Nimmt man einen dritten Punkt hinzu, so hat der Fit einen Freiheitsgrad, das Gleichungssystem ist überbestimmt. Das gilt aber nur solange dieser dritte Punkt unabhängig ist, also nicht durch eine Zwangsbedingung aus den ersten zwei Punkten errechnet werden kann. Somit ergibt sich als Definition der Anzahl der Freiheitsgrade:

$$D = m - p - z. \tag{30}$$

Hier ist m die Anzahl der Messungen, p ist die Anzahl der zu schätzenden Parameter, und z ist die Anzahl der Zwangsbedingungen. In unserem Fall ist die Anzahl der Messungen gleich der Anzahl der verwendeten Bins B, und wir schätzen einen Parameter $\tilde{\tau}$. Da wir allerdings ein Histogramm verwenden haben wir auch eine Zwangsbedingung vorliegen. Die Gesamtanzahl N der ins Histogramm gefüllten Datenpunkte ist konstant, damit errechnet sich der Inhalt des letzten Bins aus den Inhalten aller anderen Bins gemäß $n_B = N - \sum_{i=1}^{B-1} n_i$. Also gilt für unseren Fall:

$$D = B - 2. \tag{31}$$

Je mehr Freiheitsgrade eine Schätzung hat, desto größer kann die verbleibende quadratische Abweichung nach der Schätzung sein. Das χ^2 ist dabei ein sehr sensibler Test, ob die Schätzung mit den Daten kompatibel ist.[5]

Bei den hier gezeigen grafischen Beispielen wurden $B = 15$ Bins verwendet, also hatte die Schätzung 13 Freiheitsgrade. In Abbildung 9 lässt sich ein Wert von $\chi^2 \approx 12.5$ ablesen. Das zeugt von einer sehr guten statistischen Verträglichkeit der Exponentialfunktion mit Parameter $\tilde{\tau}$ (“Fitfunktion”) mit den Daten.

4.4 Aufgaben

Folgende Aufgaben sind in Gruppen zu je zwei bis drei Personen auszuführen:

- Simulation wartezeitverteilter Zufallszahlen: Das dient der Kontrolle des Auswerteprogramms. Bei simulierten Daten ist das wahre τ bekannt, und es gibt keinen Untergrund. Das fertige Auswerteprogramm soll erst auf die echten Daten angewandt werden, wenn es die simulierten Daten einwandfrei bearbeiten kann.

- Erstellen des Auswerteprogramms: Das ist die eigentliche Hauptaufgabe, die Vorgangsweise ist in den Schritten 1 bis 5 des vorangegangenen Kapitels beschrieben.

[5] Wenn Daten gefittet werden sollen, deren zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht bekannt ist, so dient der χ^2-Test als feinfühliges Mittel, um verschiedene angenommene Wahrscheinlichkeitsverteilungen gegeneinander abzuwägen.

- Wiederholtes Durchführen des Experiments mit simulierten Daten: Die geschätzte mittlere Zerfallszeit $\tilde{\tau}$ ist eine Zufallsgröße, die bei jeder erneuten Durchführung des Experiments etwas anders ist. Dabei ist $\tilde{\tau}$ normalverteilt um den Mittelwert τ (das wahre τ), mit einer Standardabweichung von σ. Jenes σ, das die Breite dieser Verteilung bei wiederholter Durchführung des Experiments beschreibt, ist genau das σ, das wir bei einer einzelnen Durchführung aus der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bekommen!

- Auswerten der realen Daten: Jede Gruppe bekommt einen aliquoten Teil des gesamten Datensatzes und berechnet daraus die geschätzte mittlere Zerfallszeit $\tilde{\tau}$, deren statistische Unsicherheit σ und die Testgröße χ^2. Danach vergleichen wir die Ergebnisse und berechnen ein Gesamtergebnis durch gewichtete Mittelung der Gruppenergebnisse:

$$\tilde{\bar{\tau}} = \frac{\sum_{i=1}^{g} \frac{\tilde{\tau}_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{g} \frac{1}{\sigma_i^2}}, \qquad \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} = \sum_{i=1}^{g} \frac{1}{\sigma_i^2}, \qquad \tilde{\chi^2} = \sum_{i=1}^{g} \frac{(\tilde{\bar{\tau}} - \tilde{\tau}_i)^2}{\sigma_i^2}, \tag{32}$$

  wobei g die Anzahl der Gruppen ist. Dieses Gesamtergebnis vergleichen wir mit dem Ergebnis einer Schätzung basierend auf dem kompletten Datensatz.

4.5 Weiterführende Aufgaben

Werden bei einer Zeitmessung m Takte einer Uhr gezählt, ist die exakte Startzeit t_{start} gleichverteilt zwischen den Takten Null und Eins, die Stopzeit t_{stop} zwischen den Takten m und $m+1$. Die Dichte der Messauflösung $f(t = t_{\text{stop}} - t_{\text{start}}|m)$ ist dann die Faltung der Dichten dieser beiden Gleichverteilungen, d.h. eine Dreiecksverteilung im Intervall $[m-1, m+1]$. Um diesen Umstand in der Datenauswertung zu berücksichtigen müssen die gemessenen Zerfallszeiten m (in Takten der Uhr) mit der Messauflösung "verschmiert" werden, d.h. zu jeder gemessenen Taktanzahl wird eine Zufallszahl aus einer Dreiecksverteilung addiert:

$$\tilde{m} = m + \epsilon, \qquad \epsilon \in Dr(-1, 1) \tag{33}$$

Wird das nicht gemacht kann es passieren, dass manchen Bins, die einen Takt gerade noch enthalten, viele Messwerte zugeordnet werden, die ohne die beschränkte Messauflösung eigentlich im nächsten Bin zu finden wären. Das schlägt sich zwar nicht so sehr im geschätzten Wert $\tilde{\tau}$ nieder, aber es erhöht die verbleibenden quadratischen Abweichungen und damit das χ^2 beträchtlich. Es ist wichtig festzuhalten dass die Resultate durch diese Verschmierung der Daten auf keine Weise verfälscht werden. Die Daten werden lediglich unempfindlich gegen die Wahl der Bingrenzen.

4.6 Durchführung

Matlab-Befehle, die zum Implementieren des Programms benötigt werden:

```
t_min=0.8;              % Variablendefinition und -deklaration
T = load('data.txt');   % lade die Daten in die Matrix T
A = T(:,2);             % speichere die Zweite spalte in eine neue Variable
A = A';                 % transponiere Matrix
a = A(35:end);          % speichere die Elemente 35 aufwaerts
n=numel(A);             % zähle alle Einträge
A(A >250) = [];         % entferne werte über 250 mit logischer Indizierung
A(A == 0 ) = [];        % entferne null
x = linspace(1,20,100); % erzeuge 100 linear aufsteigende Zahlen zwischen 1 und 20
y = 2:4:400;            % erzeuge 100 Zahlen mit Abstand 4 (Zeilenvektor)
plot(x,y);              % plotte y als Funktion von x
hold on;                % weitere plot-Befehle werden ueberlagert
hold off;               % keine weiteren plots werden ueberlagert
e = x * y';             % Inprodukt
f = x' * y;             % Kreuzprodukt
d = x .* y;             % elementweise Multiplikation
d = x .^ y;             % elementweise Potenzierung
[bininhalt,binzentrum]=hist(A,30) % plotte und speichere Histogramm mit 30 bins
bininhalt=histc(a,bingrenzen);    % speichere Bininhalte (plottet nicht!)
bar(binzentrum,bininhalt);        % plotte Balkendiagramm
u = rand(2,10);         % erstelle 2x10-Matrix gleichverteilter Zufallszahlen
A_min = min(A);         % speichert Minimalwert von A
index = find(A==A_min); % speichert Vektorindex des Minimalwerts von A
X = [1, 2, 3 ...
     4, 5, 6 ...
     7, 8, 9];          % erstellt eine Matrix
p = X\y;                % Linksdivision mit der Koeffizientenmatrix
if "log. Ausdruck"      % if-Struktur
  .
  .
  .
end
for i = x               % for-Schleife, Schleifenindex i durchlaeuft alle Werte von x
  .
  .
  .
end
```